Varianta 87

Subiectul I.

a) $\left|\sqrt{2}+\sqrt{3}i\right|=\sqrt{5}$.

b) $\frac{5\sqrt{14}}{7}$.

c) Ecuația tangentei căutate este $x+2y-6=0$.

d) Punctele L, M, N sunt coliniare, deoarece $\overrightarrow{LN}=2\cdot\overrightarrow{LM}$.

e) $V_{ABCD}=\frac{1}{3}$.

f) $a=\frac{23}{41}$, $b=\frac{2}{41}$.

Subiectul II.

1.

a) $a_{20}=2^{19}$.

b) Probabilitatea căutată este $p=\frac{2}{5}$.

c) $g(0)+g(-31)=-3$.

d) $x\in\{-2,2\}$.

e) $x_1^2+x_2^2+x_3^2=2$.

2.

a) $f'(x)=\cos x-\sin x$, $x\in\mathbf{R}$.

b) $\int_0^{\pi} f(x)\,dx=(-\cos x+\sin x)\Big|_0^{\pi}=2$.

c) $f''(x)<0$, $\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, deci f este concavă pe $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

d) $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\cos 1-\sin 1$.

e) $\int_0^1 \frac{x^2}{x^3+1}\,dx=\frac{1}{3}\cdot\ln 2$.

Subiectul III.

a) $\det(A)=1$.

b) rang $(A)=2$.
c) Calcul direct.
d) $\det(A)=1\neq 0$, deci A este inversabilă şi $A^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.
e) „$\supseteq$" Considerăm $M\in J(A)$, $M=aA+bI_2$, cu $a,b\in\mathbf{Q}$ şi polinomul $g\in\mathbf{Q}[X]$, $g(X)=aX+b$. Avem că $g(A)=M$, deci $M\in I(A)$.
„$\subseteq$" Considerăm $M\in I(A)$, deci există $g\in\mathbf{Q}[X]$ astfel încât $g(A)=M$.
Din teorema împărțirii cu rest, există şi sunt unice $q\in\mathbf{Q}[X]$ şi $a,b\in\mathbf{Q}$ astfel încât $g=(X^2-X+1)\cdot q+aX+b$. Obținem $M=g(A)=aA+b\cdot I_2\in J(A)$
f) Se demonstrează prin reducere la absurd.
g) Observăm că pentru $a,b\in\mathbf{Q}$, avem $aA+bI_2=O_2 \iff a=b=0$.
Se consideră $M\in J(A)$, $M=aA+bI_2$, cu $a,b\in\mathbf{Q}$, astfel ca $M\neq O_2$, deci astfel ca $a\neq 0$ sau $b\neq 0$ şi se demonstrează că există $N\in J(A)$, $N=cA+dI_2$, cu $c,d\in\mathbf{Q}$, astfel încât $c\neq 0$ sau $d\neq 0$ şi $MN=NM=I_2$.

Subiectul IV.
a) $f(0)=1$ şi $F(0)=0$.
b) Funcția $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ este primitiva funcției f pentru care $F(0)=0$. Rezultă că $F'(x)=f(x),\ \forall x\in\mathbf{R}$.
c) $F'(x)=e^{-x^2}>0$, $\forall x\in\mathbf{R}$, deci F este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.
d) Evident, ținând cont de semnul funcției F''.
e) Considerăm funcția $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $g(x)=e^x-x-1$, derivabilă pe $\mathbf{R}$, cu $g'(x)=e^x-1$. Avem $g'(x)\geq 0 \iff x\in[0,\infty)$.
Rezultă că $x=0$ este un punct de minim global pentru g.
Aşadar $g(x)\geq g(0)=0$, $\forall x\in\mathbf{R}$, rezultând inegalitatea cerută.
f) Din **e)** obținem că $\forall x\in\mathbf{R}$, $f(x)=e^{-x^2}=\frac{1}{e^{x^2}}\leq\frac{1}{x^2+1}$, $\forall x\in\mathbf{R}$.
g) Deoarece F este strict crescătoare pe $(0,\infty)$, există $\lim_{x\to\infty}F(x)$.
Considerăm $x>1$. $F(x)=\int_0^1 f(t)\,dt+\int_1^x f(t)\,dt=\alpha+\int_1^x f(t)\,dt$.
Din **f)** avem că $f(t)\leq\frac{1}{t^2+1}$, $\forall t\in\mathbf{R}$ (1)
Se integrează (1) pe intervalul $[0,1]$ şi pe intervalul $[1,x]$ şi se deduce concluzia.